

Semaine du 8 au 14 Mars : Calcul de séries

Exercice 204 (Convergence) En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général sont convergentes. Le cas échéant, calculer leur somme.

$$1. \sum_{n \geq 0} 2^n. \quad 2. \sum_{n \geq 0} n. \quad 3. \sum_{n \geq 0} e^{-n}. \quad 4. \sum_{n \geq 0} \frac{1+2^n}{4^{n+1}}.$$

Exercice 205 (Calcul direct) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}. \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}. \quad 3. \sum_{n \geq k} \binom{n}{k}.$$

Exercice 206 (Calcul direct) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{3^n}{(n+1)!}. \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}. \quad 3. \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{n!}.$$

Exercice 207 (Telescopage) En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries de terme général sont convergentes. Le cas échéant, calculer leur somme.

$$1. \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right). \quad 2. \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Pour la deuxième, montrer que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

Exercice 208 (Somme dérivée) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}. \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{4^n}. \quad 3. \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}.$$

Exercice 209 (Somme dérivée) Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme (pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}$) :

$$1. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!}. \quad 2. \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{5^n}. \quad 3. \sum_{n \geq 2} n(-1)^n x^{n-2}.$$

Semaine du 15 Mars au 21 Mars

Exercice 210 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \leq 0. \quad 2. (\ln(x))^2 + 3\ln(x) - 4 < 0.$$

Exercice 211 (Récurrence) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \ln(u_n)$. Démontrer par récurrence que $u_n \in [1, e]$. Puis démontrez (en utilisant l'IAF) que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |u_n - 1|$. Montrez enfin que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n} (e - 1)$

Exercice 212 (Sommes) Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont vraies ?

$$1. \sum_{k=1}^n (\alpha + a_k) = \alpha + \sum_{k=1}^n a_k. \quad 3. \sum_{k=1}^n a_k + b_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{j=1}^n b_j. \\ 2. \sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k. \quad 4. \sum_{k=1}^n (a_k)^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^\alpha.$$

Exercice 213 (Probabilité) On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0, 1[$. On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus lors des n premiers lancers. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 214 (Limites) Calculer les limites suivantes

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x + \ln(x)}{e^x - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow \ln(2)} \frac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x - 2}.$$

Exercice 215 (Système) Résoudre le système en fonction de λ

$$(E_\lambda) : \begin{cases} (3 - \lambda)x + y = 0 \\ 3x + (1 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Exercice 216 (Intégrales) Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^e -\frac{3}{x} dx. \quad 2. \int_1^4 \frac{\ln(x)}{x} dx. \quad 3. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

Semaine du 22 Mars au 28 Mars

Exercice 217 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x^3 + x^2 - 2 > 0$.

2. $e^{2x} - 4 < 0$.

Exercice 218 (Récurrence) Récurrence difficile. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 219 (Probabilité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise dispose d'un lot de n feuilles numérotées $1, 2, \dots, n$. Elle photocopie ces n feuilles et veut agraffer chaque copie avec son original. Suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les n originaux et les n copies. L'entreprise place donc les n originaux et les n copies dans une boîte. Une personne est chargée du travail suivant : Elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boîte. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boîte. Sinon elle les remet dans la boîte et recommence. On note A_n l'évènement "A l'issue de la première pioche, le deux feuilles piochées ne sont pas agrafées". Calculez $P(A_n)$.

Exercice 220 (Limites) Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \ln(x) + 2$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$.

Exercice 221 (Système) Résoudre le système selon les valeurs de λ

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3 + \lambda)y + 3z = 0 \\ x + y - (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 222 (Intégrales) Donnez le résultat des intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$.

2. $\int_0^1 \frac{t^3}{t^4 + 1} dt$.

3. $\int_0^1 t^7 e^{t^4} dt$.

Exercice 223 (Série) Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}$.

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$.

3. $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{2^k}{k!}$.

Semaine du 5 au 11 Avril : Calcul d'intégrale

Exercice 224 (Intégrales) Donnez le résultat des intégrales suivantes (en trouvant une primitive) :

1. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

2. $\int_1^2 \frac{e^t}{2+e^t} dt$.

3. $\int_0^2 x e^{2x} dx$.

Exercice 225 (Intégrales) Donnez le résultat des intégrales suivantes (en trouvant une primitive) :

1. $\int_1^e \frac{\ln^n(t)}{t} dt$.

2. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{\sqrt{2+e^t}} dt$.

3. $\int_0^2 (3x^2) e^{x^3} dx$.

Exercice 226 (Intégration par parties) Donnez le résultat des intégrales suivantes (à l'aide d'une IPP) :

1. $\int_0^1 t e^{-t} dt$.

2. $\int_1^x \ln(t) dt$.

Exercice 227 (Intégration par parties) Donnez le résultat des intégrales suivantes (à l'aide d'une IPP) :

1. $\int_0^1 (t^2 + 1) e^t dt$.

2. $\int_1^x \ln^2(t) dt$.

Exercice 228 (Intégration par changement de variable) Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé

1. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t} (\ln t)^2 dt$ ($u = \ln(t)$).

2. $\int_0^1 \sqrt{2+t} dt$ ($t = u^2 - 2$).

Exercice 229 (Intégration par changement de variable) Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé

1. $\int_0^2 \frac{t^2}{t^3 + 8} dt$ ($u = t^3 + 8$).

2. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t(t+1)} dt$ ($u = \frac{t}{t+1}$).

Exercice 230 (Sommes de Riemann) Déterminer les limites de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$

2. $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

Semaine du 12 au 18 Avril : VA, ECRICOME

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B . On constate que le serveur A est choisi dans 70% (c'est-à-dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Dans les exercices 224 et 225, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

Exercice 231 *Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.*

Exercice 232 *Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?*

Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B , et le jour 6 le serveur A . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2. On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série.

Exercice 233 *Justifier la formule*

$$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k(0.7) + (0.7)^k(0.3)$$

Exercice 234 *Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$*

Exercice 235 *Déterminer l'espérance mathématique de L_1 .*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le

serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

Exercice 236 *Déterminer les lois de N_n et T_1 , leurs espérances mathématiques et leurs variances.*

Exercice 237 *Montrer que $\forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}$*

Semaine du 19 au 25 Avril : Fonctions, ECRICOME

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 238 *Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .*

Exercice 239 *Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.*

Exercice 240 *Étudier la convexité de f sur \mathbb{R}^{+*} , puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.*

Exercice 241 *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 1$.*

Exercice 242 *Tracer la courbe représentative de f et la tangente à cette courbe en $x = 1$.*

Exercice 243 *Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur un intervalle J que l'on précisera.*

Exercice 244 *Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.*